

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

Scanează codul QR pentru
a accesa aplicația MATE 2000+



matematică algebră geometrie

clasa a VIII-a

partea a II-a

ediția a IX-a, revizuită și adăugită

mate 2000 – consolidare

ÎNVĂȚARE DE CONSOLIDARE[®]
antrenament



Capitolul I. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

1. Operații cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere.....	5
1.1. Adunarea și scăderea	5
1.2. Înmulțirea. Împărțirea. Ridicarea la putere	8
1.3. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	10
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	16
<i>Test de autoevaluare</i>	17
Recapitulare și sistematizare prin teste	19
2. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$	20
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	24
<i>Test de autoevaluare</i>	25

Capitolul II. FUNCȚII

1. Funcții definite pe mulțimi finite	28
2. Funcția liniară	33
Recapitulare și sistematizare prin teste	42
<i>Test de autoevaluare</i>	47
3. Elemente de statistică	49

Capitolul III. TEME PENTRU RECAPITULAREA FINALĂ ÎN VEDEREA EVALUĂRII NAȚIONALE

1. Numere naturale. Puteri cu exponent număr natural. Divizibilitate.....	56
2. Rapoarte. Proporții. Proporționalitate	58
3. Procente	60
4. Numere reale	62
5. Calcul algebric	64
6. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$	67
7. Probleme de aritmetică ce se pot rezolva cu ajutorul ecuațiilor sau al sistemelor de ecuații	69
8. Inecuații	71
9. Funcții	72
Recapitulare și sistematizare prin teste	75
<i>Test de autoevaluare 1</i>	79
<i>Test de autoevaluare 2</i>	81

GEOMETRIE

Capitolul I. ARII ȘI VOLUME

1. Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate	83
2. Prisma patrulateră regulată dreaptă. Paralelipipedul dreptunghic	88
3. Cubul	92
4. Prisma triunghiulară regulată	95
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	98
Recapitulare și sistematizare prin teste	100

<i>Test de autoevaluare</i>	103
5. Piramida regulată	105
Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	110
Recapitulare și sistematizare prin teste	112
<i>Test de autoevaluare</i>	115
6. Trunchiul de piramidă regulată	117
Recapitulare și sistematizare prin teste	120
<i>Test de autoevaluare</i>	123
7. Cilindrul circular drept	125
8. Conul circular drept	127
<i>Test de autoevaluare</i>	131
9. Trunchiul de con circular drept.....	133
<i>Test de autoevaluare</i>	137
Recapitulare și sistematizare prin teste	139
10. Sfera	141
MODELE DE TEZE SEMESTRIALE	142
RECAPITULARE ȘI EVALUARE FINALĂ	
Exerciții și probleme recapitulative pentru evaluarea finală	157
ALGEBRĂ	157
GEOMETRIE	161
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ	164
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	177

Capitolul I

Calcul algebric în $\mathbb{R}$

PP Competențe specifice

- C₁. Identificarea componentelor unei expresii algebrice
- C₂. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere
- C₃. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor
- C₄. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric
- C₅. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric
- C₆. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurtat

PE-PP 1. Operații cu rapoarte algebrice de numere reale reprezentate prin litere

PE-PP

1.1. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA



Suma (diferența) a două **rapoarte** algebrice este tot un **raport** algebric. Operația de adunare (scădere) a două rapoarte algebrice se poate face în două situații:

a) dacă ambele rapoarte au **același numitor**, suma lor este un raport algebric care are ca numitor numitorul comun al celor două rapoarte și ca numărător suma (diferența) numărătorilor celor două rapoarte;

b) dacă cele două rapoarte au **numitori diferiți**, se amplifică, aducându-se la același numitor și se adună (se scad) conform regulii de mai sus.

Observație:

Operația de adunare (scădere) a rapoartelor algebrice are aceleași proprietăți ca operația de adunare (scădere) a fracțiilor ordinare.

$$a) \frac{5x-3}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x^2+12}{4} = \frac{5x-3+x+x^2+12}{4} = \frac{x^2+6x+9}{4} = \frac{(x+3)^2}{4};$$

$$b) \frac{2x+7}{3x} + \frac{x-3}{2x^2} + \frac{4x+5}{6} = \frac{2x(2x+7)}{6x^2} + \frac{3(x-3)}{6x^2} + \frac{x^2(4x+5)}{6x^2} = \frac{4x^3+9x^2+17x-9}{6x^2}, x \in \mathbb{R}^*.$$

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Efectuați:

$$a) \frac{x}{5} + \frac{2}{5};$$

$$b) \frac{3x+2}{7} + \frac{4x+5}{7};$$

$$c) \frac{2-3x}{11} + \frac{9-8x}{11};$$

$$d) \frac{4x+6}{3} + \frac{x+3}{3};$$

$$e) \frac{x-3}{2} + \frac{3x+4}{2} + \frac{4x+7}{2};$$

$$f) \frac{x+5}{3} + \frac{2-7x}{2} + \frac{2x-4}{5}.$$

2. Efectuați calculele:

$$a) \frac{7x-6}{x-2} + \frac{2-5x}{x-2};$$

$$b) \frac{17x+9}{x+1} + \frac{8}{x+1};$$

$$c) \frac{x}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{2x-14}{x-3};$$

$$d) \frac{6x}{3x-2} + \frac{5-3x}{3x-2} - \frac{7}{3x-2}.$$

3. Efectuați calculele:

$$a) \frac{1}{2} + \frac{x+2}{3x} - \frac{5x^2+4}{6x^2};$$

$$b) \frac{2x}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+x};$$

$$c) \frac{2x+3}{x^2-1} + \frac{3x+2}{x^2-1};$$

$$d) \frac{x(x-1)}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2-4};$$

$$e) \frac{x^2}{x^2-2x} + \frac{2-3x}{x^2-2x};$$

$$f) \frac{x^2+3}{x^2+2x-3} + \frac{4x}{x^2+2x-3};$$

$$g) \frac{x(x-3)}{x^2-16} + \frac{2x-5}{x^2-16} - \frac{11-x}{x^2-16}.$$

PE Aplicare și exersare **

4. Efectuați:

$$a) \frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x^2-1};$$

$$b) \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} - \frac{16}{x^2-4};$$

$$c) \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{2}{x^2-4};$$

$$d) \frac{4}{x+2} - \frac{x+10}{x^2-4} + \frac{3}{x-2};$$

$$e) \frac{1-3x}{x^2-x} + \frac{2}{x-1} + \frac{5}{3x};$$

$$f) \frac{3x+1}{2x^2-6x} - \frac{x+2}{3x-9} + \frac{2x-1}{6x}.$$

5. Calculați:

$$a) \frac{x-2}{x+1} + \frac{x+4}{x^2+3x+2} - \frac{x-1}{x+2};$$

$$b) \frac{x+1}{x-1} + \frac{4}{x^2-1} + \frac{1-x}{x+1};$$

$$c) \frac{2x+1}{x-2} + \frac{1-2x}{x+2} + \frac{x^2+16}{x^2-4};$$

$$d) \frac{x-2}{x+1} + \frac{x+3}{x+2} + \frac{5-x^2}{x^2+3x+2}.$$

6. Calculați:

$$a) \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-1}{x+3} + \frac{24}{x^2-9};$$

$$b) \frac{x+1}{x-4} + \frac{16-6x}{x^2-16} - \frac{x-1}{x+4};$$

$$c) \frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x-4} + \frac{5}{x^2-7x+12};$$

$$d) \frac{x-5}{x-2} - \frac{x+1}{x-4} - \frac{6}{x^2-6x+8}.$$

PE Aprofundare și performanță ***

7. Efectuați calculele:

$$a) \frac{x^2+4}{x^2-4} - \left[\frac{5}{x-2} - \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{x}{x+2} \right) \right];$$

$$b) \frac{4x+5}{x^2-1} - \left[\frac{2}{x-1} - \left(\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{x^2}{1-x^2} \right) \right];$$

$$c) \frac{x^2-27}{x^2-9} - \left[\frac{5}{x+3} - \left(\frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x+3} \right) \right];$$

$$d) \frac{x}{x^2-25} - \left[\frac{3}{x-5} - \left(\frac{x+1}{x-5} - \frac{3}{x+5} + \frac{x^2}{25-x^2} \right) \right].$$

$$8. \text{ Fie expresia } E(x) = \frac{3}{4x^2-9} - \frac{x+1}{2x+3} - \frac{x}{2x-3}.$$

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Aflați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

$$9. \text{ Se consideră expresia } F(x) = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2-1}.$$

a) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $F(x)$ nu este definită.

b) Arătați că $G(x) = (x+1) \cdot F(x)$ este număr natural.

c) Calculați suma: $F(2) \cdot F(3) + F(3) \cdot F(4) + \dots + F(2020) \cdot F(2021)$.

PE-PP Supermate ****

$$10. \text{ Fie expresia } E(x) = \left(\frac{12}{x^2-9} + \frac{x}{x-3} \right) - \left[\frac{x+1}{x+3} + \left(\frac{x+2}{x-3} - \frac{x}{x+3} \right) \right].$$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.

$$11. \text{ Fie expresia } E(x) = \left(\frac{x}{x+4} + \frac{24}{x^2-16} \right) - \left[\frac{x+3}{x+4} - \left(\frac{x-1}{x-4} - \frac{x-2}{x+4} \right) \right].$$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{Z}$.



Produsul a două rapoarte algebrice, **câtul** a două rapoarte algebrice, **puterea a n -a** a unui raport algebric, $n \in \mathbb{Z}$, sunt tot rapoarte algebrice.

Produsul a două rapoarte algebrice este raportul algebric care are ca numărător produsul numărătorilor rapoartelor date, iar ca numitor produsul numitorilor rapoartelor date.

Exemple: a) $\frac{4x^2}{3y} \cdot \frac{9y^2}{8x^3} = \frac{3y}{2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{3x}{5x+5} \cdot \frac{10x+10}{18x^2} = \frac{1}{3x}$, $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Inversul unui raport algebric este raportul algebric care are ca numărător numitorul raportului dat, iar ca numitor numărătorul raportului dat.

Exemple: a) $\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{-1} = \frac{x^2+1}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$; b) $\left(\frac{3xz}{19ab}\right)^{-1} = \frac{19ab}{3xz}$, $x, z, a, b \in \mathbb{R}^*$.

Câtul a două rapoarte algebrice este raportul algebric obținut prin înmulțirea primului raport, numit deîmpărțit, cu inversul celui de-al doilea raport, numit împărțitor.

Exemple: a) $\frac{4x^2+8}{9x} : \frac{2x^2+4}{27x^2} = 6x$, $x \in \mathbb{R}^*$; b) $\frac{10x^2}{7y^6} : \left(-\frac{15x^3}{14y^4}\right) = -\frac{4}{3y^2x}$, $x, y \in \mathbb{R}^*$.

Puterea a n -a a unui raport algebric este raportul care are ca numărător puterea a n -a a numărătorului raportului dat, iar ca numitor puterea a n -a a numitorului raportului dat.

Exemple: a) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^2 = \frac{4x^2}{9y^2}$, $y \in \mathbb{R}^*$; b) $\left(\frac{x+1}{y^2+1}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{(y^2+1)^2}$, $y \in \mathbb{R}$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor:

a) $\frac{2x}{7x+7} \cdot \frac{14x+14}{4x^2}$; b) $\frac{2x+6}{5x^2} \cdot \frac{10x}{4x+12}$; c) $\frac{3x+6}{7x^2} \cdot \frac{14x^2+28x}{x^2+4x+4}$;
d) $\frac{x^2-2x}{5x^2} \cdot \frac{5x+10}{x^2-4}$; e) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{3x^2-3x}{x^2+x}$; f) $\frac{3x+9}{x^2+2x} \cdot \left(-\frac{3x+6}{2x+6}\right)$.

2. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor algebrice:

a) $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-6x+9}$; b) $\frac{4x+8}{x^2+4x+4} \cdot \frac{x^2-4}{4x-8}$;
c) $\frac{x^2+4x}{x^2-16} \cdot \frac{3x-12}{5x+25}$; d) $\frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \cdot \frac{x^2-3x+2}{4x+4}$;
e) $\frac{7x+35}{x^2-25} \cdot \frac{x^2-7x+10}{x^2-4x+4}$; f) $\frac{x^2-4}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4x+4}$.

3. Calculați, stabilind valorile reale ale lui x pentru care rapoartele sunt definite:

a) $\frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 8x + 16} : \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 7x + 12}$;

b) $\frac{x^2 + 5x}{x^2 - 4x + 4} : \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 4}$;

c) $\frac{3x^2 + 6x}{x^2 + 5x + 6} : \frac{4x - 12}{x^2 - 9}$;

d) $\frac{6x - 18}{x^2 - 6x + 9} : \frac{x^2 - 25}{x^2 - 8x + 15}$;

e) $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 25} : \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 8x + 15}$;

f) $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 7x + 12} : \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 16}$.

4. Efectuați calculele:

a) $\frac{x^2 - 8x + 16}{5x - 15} : \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - x - 6}$;

b) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 7x + 12} : \frac{x^2 - 10x + 24}{x^2 - 16}$;

c) $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 25} : \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 8x + 15}$;

d) $\frac{x^2 + 12x + 32}{x^2 + 16x + 64} : \frac{x^2 + 11x + 28}{x^2 - 64}$;

e) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - x - 12}$;

f) $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 9x + 20} : \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 7x + 12}$.

5. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al fiecărui raport:

a) $\left(\frac{2x}{3x+1}\right)^3 : \frac{3x+1}{2x} : \left(\frac{4x^2}{3x+1}\right)^2$;

b) $\left[\frac{(2x-3)^3}{(x+2)^2}\right]^2 : \left(\frac{x+2}{2x-3}\right)^7 : \left[\frac{(x+2)^2}{2x-3}\right]^2$;

c) $\left[\frac{(x-1)^2}{(3x-2)^3}\right]^3 : \left[\frac{x-1}{(3x-2)^2}\right]^4 : \frac{1}{(x-1)^2}$;

d) $\left[\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{2x-3}{2x}\right)^5 : \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^2$;

e) $\left(\frac{3x-1}{2x}\right)^5 : \left[\frac{(3x-1)^2}{4x^2}\right]^2 : \frac{3x^2 - x}{5x^2}$;

f) $\frac{3x^2 - 2x}{4x^2} : \left[\left(\frac{2x-5}{3x-2}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{2x-5}{3x-2}\right)^5$.

PE Aprofundare și performanță ***

6. Efectuați calculele:

a) $\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12} : \frac{3x^2 + 12x}{x^2 - 6x + 9}$;

b) $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x - 10} : \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9x + 14} : \frac{x+5}{x-7}$;

c) $\frac{x(x+5)+6}{x^2 + 3x + 2} : \frac{x(x+8)+15}{x^2 + 6x + 5}$;

d) $\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 + 4x + 4} : \frac{x^2 + 3x - 18}{x^2 - 4}$;

e) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 7x + 12} : \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} : \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x}$;

f) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x - 24} : \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 30} : \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 6x + 9}$.

7. Calculați:

a) $\frac{x^2 - 6x + 9}{4x^2 - 25} : \frac{2x+5}{4x-12} : \frac{7x-21}{4x^2 - 20x + 25}$;

b) $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 7x + 12} : \frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 5x + 6} : \frac{5x+20}{4x-8}$;

c) $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 6x + 9} : \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - 7x + 12} : \frac{2x+10}{3x-12}$;

d) $\frac{2x^2 + 5x + 3}{3x^2 + 7x + 4} : \frac{3x^2 + 10x + 8}{2x^2 + 9x + 9}$.

- a) $\frac{x^2+3x-18}{x^2+2x-8} \cdot \frac{x^2-6x+8}{x^2+9x+18} : \frac{x^3-7x+12}{2x^2+6x};$
 b) $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x-15} : \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+5} \cdot \frac{4x+12}{6x^2-18x};$
 c) $\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+3}{x+4} : \frac{x^2+6x+5}{x^2+6x+8} : \frac{x+3}{x+5}.$

PE-PP

Supermate ****

9. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) : \frac{2x+6}{x^2+5x+6}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$.

- a) Arătați că $E(x) = \frac{x+4}{x-2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 2\}$.
 b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

10. Fie expresia $E(x) = 10 - \frac{x}{x-5} \cdot \left(\frac{1}{x-5} - \frac{x+1}{x^2+5x} \right) : \frac{1}{(x-5)^2}$.

- a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.
 b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
 c) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.
 d) Arătați că, dacă $x \in [0; +\infty)$, atunci $E(x) \in (1; 9]$.

11. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{1}{x+3} + \frac{x}{x-3} - 1 \right) \cdot \frac{x+3}{12x+18}$.

- a) Pentru ce valori reale ale lui x nu are sens expresia?
 b) Arătați că, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$, $E(x) \notin \mathbb{Z}$.
 c) Scrieți ca interval mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |(x-3)^2 \cdot E(x)| \leq \frac{1}{3} \right\}$.

PE-PP

1.3. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAȚIILOR ȘI FOLOSIREA PARANTEZELOR



Cu **rapoartele algebrice** se efectuează următoarele **tipuri de operații**:

- de ordinul I (**adunarea și scăderea**);
- de ordinul al II-lea (**înmulțirea și împărțirea**);
- de ordinul al III-lea (**ridicarea la putere**).

Calculul cu rapoarte algebrice se face respectând următoarele reguli:

- când avem operații de **același ordin**, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise;
- când avem operații de **ordine diferite**, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul al III-lea, apoi cele de ordinul al II-lea și, în final, cele de ordinul I;
- când avem exerciții în care apar **paranteze**, se efectuează mai întâi operațiile dintre parantezele rotunde, apoi operațiile dintre cele pătrate și, în final, cele dintre acolade.

1. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al rapoartelor:

$$a) \frac{4x-12}{x^2-9} - \frac{x+2}{x-3} : \frac{x^2+5x+6}{x-3};$$

$$b) \frac{x^2-7x+12}{x^2-16} \cdot \frac{x-2}{x-3} + \frac{2x+14}{x+4};$$

$$c) \frac{x^2+9x+20}{x^2-25} \cdot \frac{x-5}{x+3} - \frac{x-3}{x^2-9};$$

$$d) \frac{5x+6}{x^2-4} - \frac{x+3}{x-2} : \frac{x^2+5x+6}{x-2};$$

$$e) \frac{x^2+10x+21}{x^2+14x+49} : \frac{x^2+7x+12}{x^2-16} + \frac{x^2-2x-35}{x^2-49};$$

$$f) \frac{x^2-49}{x^2-7x} - \frac{2x+7}{x^2+x} : \frac{1}{x+1}.$$

2. Aduceți expresiile la forma cea mai simplă, stabilind de fiecare dată domeniul lor de existență:

$$a) E(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) : \frac{x^2+1}{x^2-1};$$

$$b) E(x) = \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x^2-4} \right) : \frac{2x+2}{x^2+3x+2};$$

$$c) E(x) = \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x^2+x} + \frac{x-3}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x^3-x}{x^2-4};$$

$$d) E(x) = \left[\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-3}{x+2} - \frac{25}{(x+2)(x-3)} \right] : \frac{5}{x+2};$$

$$e) E(x) = \left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x} \right) : \frac{2}{x-1};$$

$$f) E(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+2} - \frac{6}{x-2} \right).$$

3. a) Fie $E(x) = \frac{(x+3)^2-16}{x^2-49} : \frac{x-1}{x-7}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 1, 7\}$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 1, 7\}$.

b) Fie $E(x) = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2x} : \left(1 - \frac{2}{x} \right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Arătați că $E(x) = 1$, pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

4. Efectuați calculele, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al expresiilor algebrice:

$$a) \left[\frac{5}{2x+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(2x+1)} \right] : \frac{3x-6}{2x^2-x-1};$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2-4} \right) : \frac{2x+6}{x^3-4x};$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{3x-7}{4-9x^2} \right) : \frac{3x^2+5x+2}{1-2x};$$

$$\text{d) } \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} + \frac{3}{x+1} \right) : \frac{2}{x-1};$$

$$\text{e) } \left(\frac{1}{x^2-x} - \frac{3}{1-x^2} - \frac{2}{x^2+x} \right) : \frac{1}{x^2-x}.$$

5. Calculați, stabilind de fiecare dată domeniul de existență al expresiilor algebrice:

$$\text{a) } \frac{x^2-4}{x+1} \cdot \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2x+8}{x^2+5x+6} \right) + \frac{5}{x+3}; \quad \text{b) } \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{x+2} - \frac{x^2-1}{x^2-4} \right);$$

$$\text{c) } \left(\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x^2+x} \right) : \frac{2x-4}{x^2+3x}; \quad \text{d) } \left(\frac{x^2-x}{x^2-25} - \frac{x-2}{x+5} + \frac{x-3}{5-x} \right) \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2-x-2};$$

$$\text{e) } \left(\frac{5}{1+x} + \frac{5x}{1-x} + \frac{10x}{1-x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2} \right).$$

6. Efectuați calculele:

$$\text{a) } \left(\frac{2x}{1+x} + \frac{2}{x-1} + \frac{4x}{x^2-1} \right) \cdot \left(\frac{2x}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x}{x^2-1} \right);$$

$$\text{b) } \left(\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2} \right) : \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3};$$

$$\text{c) } \left(\frac{x+1}{2x+3} - \frac{x-2}{2x-3} + \frac{x-4}{4x^2-9} \right) \cdot \frac{2x^2-x-3}{x^2-1};$$

$$\text{d) } \left(4 - \frac{8x}{x+2} \right) : \left(\frac{x}{x-2} + \frac{4}{x+2} - \frac{2x+4}{x^2-4} \right).$$

PE Aprofundare și performanță ***

7. Efectuați calculele:

$$\text{a) } \frac{x-1}{2} \cdot \left[\frac{x+3}{x+1} - \frac{x+1}{x+4} \cdot \left(\frac{2x+3}{x-1} - 1 \right) \right];$$

$$\text{b) } \frac{6x-12}{3x+10} \cdot \left[\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+3}{x+1} \cdot \left(\frac{3x+5}{x+2} - 2 \right) \right];$$

$$\text{c) } \frac{x^2+x-2}{5x+5} \cdot \left[\left(\frac{2x+5}{x+3} - 1 \right) \cdot \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{x^2-4} \right];$$

$$\text{d) } \frac{x^2-3x+2}{9x^2-4} \cdot \left[\left(\frac{3x+5}{x+1} - 2 \right) \cdot \frac{x^2+5x+4}{x^2+5x+6} - \frac{x-3}{x-2} \right].$$

a) $\left(\frac{2}{x+2} + \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{3x+1}{x^2-4x+4}\right) : \frac{14}{4-x^2};$

b) $\left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{2x-3}{x^2-2x+1} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{4-x^2}{x^3+x^2-x-1};$

c) $\left(\frac{x-2}{x+3} - \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-15} : \frac{x^2+3x+2}{x^2-6x+5}\right) : \frac{3x-5}{x^2+x-6};$

d) $\left(\frac{36}{x^2-16} + \frac{x^2+3x+2}{x^2+7x+12} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4} - \frac{x+2}{x-4}\right) \cdot \left(\frac{4x-4}{3x-8} - 1\right).$

9. Se consideră expresia $E(x) = \left(x - 2 - \frac{x^2-4}{x+3}\right) : \frac{x-2}{x+3}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că $7 \mid A$, unde

$$A = E(x) + [E(x) + 1] + [E(x) + 1]^2 + [E(x) + 1]^3 + \dots + [E(x) + 1]^{2015}.$$

10. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{1-x}{x+1}\right) : \frac{x}{x^2-1}.$

a) Determinați valorile reale ale lui x pentru care expresia este definită.

b) Arătați că $E(x) = 4$ pentru oricare $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

11. Fie expresia $E(x) = (x^2-1) : \left(x + \frac{x^2-4}{2x-4} \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x+4}\right).$

a) Determinați domeniul de definiție al expresiei.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Arătați că $E(x) \in \mathbb{N}$ pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$.

12. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} + \frac{3}{x+1}\right) : \frac{2}{x-1}.$

a) Determinați domeniul de definiție al expresiei.

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

c) Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $E(n) \in \mathbb{N}$.

13. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x+2} - \frac{10}{x^2-4}\right) : \frac{x}{x^2+x-2}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1, 2\}$.

a) Arătați că $E(x) = \frac{x-1}{x-2}.$

b) Determinați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid E(x) \in \mathbb{Z}\}.$

14. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{2x+1} - \frac{10}{4x^2-1}\right) : \frac{2x-5}{6x^2+13x+5}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}.$

$\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}.$

a) Arătați că $E(x) = \frac{3x+5}{2x-1}.$

b) Determinați mulțimea $A = \{n \in \mathbb{Z}^* \mid E(n) \in \mathbb{Z}\}.$